DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

— OPTION M —

(temps accordé : 3 heures)

Notations

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et canoniquement orienté ;
si $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ et $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$, on note

$$u.v = \sum_{i=1}^{i=4} u_i v_i \quad \text{et} \quad |u| = \sqrt{u.u}$$

et on rappelle que u est dit unitaire si et seulement si $|u| = 1$

Dans ce problème on identifie tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{R}^4$ avec $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, en considérant $\mathbb{R}^3$ également muni de son produit scalaire canonique et canoniquement orienté.

A tout vecteur $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ on associe la matrice L_u définie par :

$$L_u = \begin{bmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{bmatrix}$$

On rappelle d'autre part l'isomorphisme canonique qui à tout $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ associe la matrice colonne $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$; ainsi u est le vecteur correspondant à la 1ère colonne de L_u et l'on désigne par u', u", u"' respectivement les vecteurs correspondants à la 2ème, 3ème et 4ème colonne de L_u.

Si $u \in \mathbb{R}^4$, $v \in \mathbb{R}^4$, on note $L_u(v)$ le vecteur de $\mathbb{R}^4$ correspondant à la colonne $L_u V$; on pourra donc considérer L_u comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

.../...

N.B. : Il est possible de traiter les questions 8° et 9° sans l'aide des questions 5°, 6° et 7°.

1°/ Etudier l'application $u \to L_u$ de $\mathbb{R}^4$ dans l'ensemble des matrices carrées à 4 lignes et 4 colonnes. Déduire de cette étude que $E = \{L_u , u \in \mathbb{R}^4\}$ est un espace vectoriel réel de dimension 4.

2°/ Calculer ${}^tL_uL_u$, où ${}^tL_u$ désigne la matrice transposée de L_u ; en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que L_u soit inversible et une condition nécessaire et suffisante pour que L_u soit orthogonale.

3°/ Si $u \in \mathbb{R}^4$, $v \in \mathbb{R}^4$, $w \in \mathbb{R}^4$, donner l'expression de $L_u(v) . L_u(w)$ en fonction de u, v, et w et en déduire que $L_u(v) = 0$ si et seulement si $u = 0$ ou $v = 0$, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $L_u(u)$ soit unitaire.

4°/ Soient $u \in \mathbb{R}^4$, $v \in \mathbb{R}^4$. On posera dans la suite du problème $\varphi(u,v) = u'''.v$;
Montrer que $L_u(v) \in \mathbb{R}^3$ si et seulement si $\varphi(u,v) = 0$.
Quelles sont les propriétés immédiates de l'application φ définie ci-dessus ?
Montrer que : $\varphi(u,v) = 0 \iff L_u(v) = L_v(u)$.

5°/Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^4$. Déterminer tous les vecteurs v de $\mathbb{R}^4$ unitaires, orthogonaux à u et tels que $\varphi(u,v) = 0$.
Calculer $L_{u'}(u')$, $L_{u'}(u'')$, $L_{u''}(u')$ et $L_{u''}(u'')$.
Montrer que si v est un vecteur appartenant à l'ensemble défini au début de la question 5° on a $L_u(u) = - L_v(v)$.

6°/ Soient $u \in \mathbb{R}^4$ et $v \in \mathbb{R}^4$ deux vecteurs unitaires, orthogonaux et tels que $\varphi(u,v) = 0$; on note Π_{uv} le plan vectoriel engendré par u et v. On pose $x = L_u(u)$ et $y = L_u(v)$: expliquer pourquoi x et y sont deux vecteurs unitaires orthogonaux de $\mathbb{R}^3$. On note Π_{xy} le plan vectoriel engendré par x et y.
On se donne $\alpha \in \Pi_{uv}$ et $\beta \in \Pi_{uv}$: montrer que $L_\alpha(\beta) = L_\beta(\alpha) \in \Pi_{xy}$ et calculer les coordonnées polaires de $L_\alpha(\beta)$ dans la base (x,y) de Π_{xy} en fonction des coordonnées polaires de α et β dans la base (u,v) de Π_{uv}.

7°/ Soient $u \in \mathbb{R}^4$, $v \in \mathbb{R}^4$; on pose $u \times v = L_u(v''') - (u.v)\, e_4$, où $e_4 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$.
Vérifier que $u \times v \in \mathbb{R}^3$ et que $v \times u = - u \times v$; calculer $|u \times v|$ et en déduire que $u \times v = 0$ si et seulement si u et v sont proportionnels. On pose $x = L_u(u)$ et $y = L_u(v)$ et on suppose $u \neq 0$: montrer que $u \times v$ est orthogonal à x et à y si et seulement si $\varphi(u,v) = 0$. Que peut-on dire de $u \times v$ si u et v sont des vecteurs orthogonaux unitaires tels que $\varphi(u,v) = 0$?

.../...

8°/ Soit $u \in \mathbb{R}^4$. On pose $x = L_u(u)$, $x' = L_u(u')$ et $x'' = L_u(u'')$.
Trouver et justifier une condition nécessaire et suffisante sur u pour que (x, x', x'') soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui sera notée B_u.
Montrer que B_u est de sens direct.

9°/ Soit (a,b,c) une base orthonormée de sens direct de $\mathbb{R}^3$. On veut prouver qu'il existe un vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^4$ <u>unique</u> tel que $(a,b,c) = B_u = B_{-u}$. Pour celà on cherche d'abord les vecteurs $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$ unitaires tels que $L_u(u) = a = (a_1, a_2, a_3)$; Calculer $u_1^2 + u_4^2$ en fonction de a_1, puis en supposant $a_1 \neq -1$, calculer u_2 et u_3 en fonction de u_1, u_4 et a. On examinera ensuite ${}^tL_u(b) = u'$ qui est un système linéaire homogène pour u_1 et u_4, dont on calculera le rang. Conclure. Calculer u lorsque $a_1 = -1$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail